



EXAMEN

P1. Estudie completamente la función definida por $f(x) = (2 - x)e^{-\frac{1}{x}}$. Se pide:

- 1) (0,5 pts.) Dominio, ceros, signos y continuidad de f .
- 2) (2,0 pts.) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ y determine asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si las hay.
- 3) (1,5 pts.) Calcular $f'(x)$ y determinar los intervalos de crecimiento, máximos y mínimos.
- 4) (1,0 pto.) Calcular $f''(x)$ y determinar convexidades y puntos de inflexión, si los hay.
- 5) (1,0 pto.) Bosqueje el gráfico de la función f e indique recorrido de f .

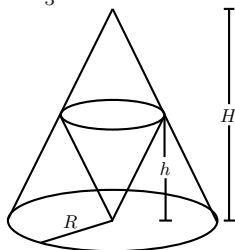
P2. a) (3,0 pts.) Considere la función $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\int_0^x \frac{e^{xt} - 1}{t} dt.$$

Demuestre que f está bien definida y que es derivable en $[0, \infty)$. Calcule $f'(x)$ y verifique que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$.

Indicación: Use cambio de variable.

- b) (3,0 pts.) En el interior de un cono de altura H y radio basal R se inscribe otro cono, invertido, con su vértice en el centro de la base del cono original, como se muestra en la figura. Demuestre que la altura h del cono interior de volumen máximo es $h = \frac{1}{3}H$.



P3. a) (2,5 pts.) Estudie la convergencia de la integral $\int_{0^+}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x + x^6}} dx$ y estudie la convergencia absoluta y condicional de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

- b) i) (1,5 pts.) Demuestre que la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y que su función

suma $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cumple la ecuación

$$f'(x) = x + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- ii) (2,0 pts.) Considere la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln(n))^q}$, con $q \geq 0$. Determine el radio e intervalo de convergencia para los distintos valores de q y analice en cada caso los extremos del intervalo.

Justi que cada uno de sus pasos

Tiempo: 3:00

Punto Problema 1

$$f(x) = (2-x)e^{-\frac{1}{x}}$$

1) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$, Deriv en $x=2$, $f(x) \geq 0$ si $x \leq 2$ \wedge $f(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$

(0.5) f es continua $\forall x \in \text{Dom } f$ por álgebra y composición de continuas.

2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2-x)e^{-\frac{1}{x}} = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2-x)e^{-\frac{1}{x}} = \infty$; $\lim_{x \rightarrow \infty} (2-x)e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$ \wedge $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^{-\frac{1}{x}} = \infty$

Con estos límites se deduce que f tiene asíntota vertical en $x \rightarrow 0^+$, no

(10) tiene asíntotas horizontales

Para asíntota oblicua $y = mx + n$, calculamos $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -1$

y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(2-x)e^{-\frac{1}{x}} + x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [2e^{-\frac{1}{x}} - x(e^{-\frac{1}{x}} - 1)] =$

(10) $= \lim_{x \rightarrow \infty} [2e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-1/x}] = 2 + 1 = 3$. Así, Oblicua: $y = -x + 3$

3) $f'(x) = -e^{-\frac{1}{x}} + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} (2-x) = e^{-\frac{1}{x}} [-1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}] = -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} (x+2)(x-1)$

(10) Así $f' = 0$ si $x = -2$ \wedge $x = 1$ y f' no existe en $x = 0$

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
f'	< 0	> 0	> 0	< 0
	\searrow	\nearrow	\nearrow	\searrow
		min		max

f presenta un mínimo local en $x = -2$

y un máximo local en $x = 1$

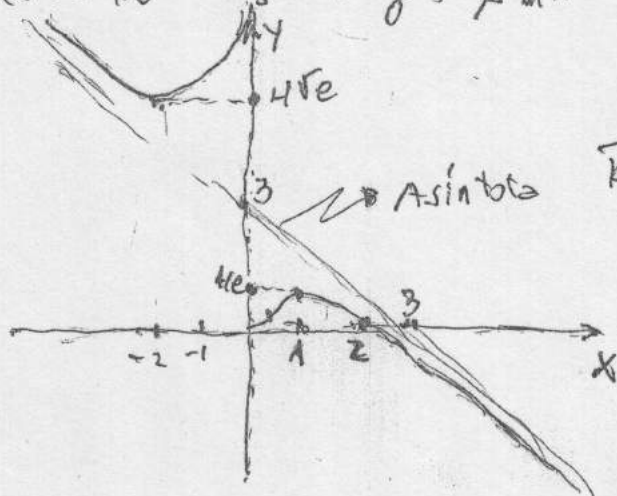
$f(-2) = 4\sqrt{e}$ \wedge $f(1) = 1/e$.

(0.5) 4) $f''(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} (-1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}) + e^{-\frac{1}{x}} (\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3}) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} (\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x}) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (2-5x)$

(10) Así $f'' = 0$ si $x = \frac{2}{5} = 0.4$ y $f'' \neq 0$ en $x = 0$

x	$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, \infty)$
f''	> 0	> 0	< 0
	\cup	\cup	\cap
			inflexión

(0.7)



Recorrido $(-\infty, 1/e] \cup [4\sqrt{e}, \infty)$

(0.3)

Pauta Problema 2

a) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ + q. $f(x) = \int_0^x \frac{e^{xt} - 1}{t} dt$

Conviene hacer el cambio $u = xt$, $du = x dt$ para evitar la variable x dentro del integrando. Así

$$f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^u - 1}{u/x} \cdot \frac{du}{x} \Rightarrow f(x) = \int_0^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du \quad (f(0) = 0)$$

La función $g(u) = \frac{e^u - 1}{u}$ es continua en $[0, x^2]$ con $x \in [0, \infty)$

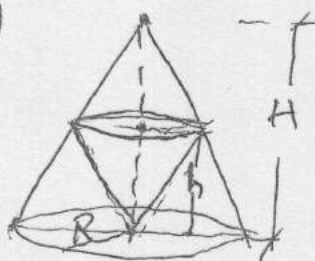
⑩ En particular en $u=0$ pues $g(0) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (EXISTE)

→ Sigue que $f(x) = \int_0^{x^2} g(u) du$ está bien definida, es continua y por TFC. es diferenciable (pues g es continua)

⑪.5) Sigue que $f'(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \cdot 2x = 2 \frac{e^{x^2} - 1}{x} \quad (f'(0) = 0)$

⑫ Como $e^{x^2} > 1 \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f$ es creciente estricta.

b)



En el esquema siguiente podemos ver que los radios y alturas de ambos conos satisfacen

$$\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h)$$

y el Volumen del cono interior es

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{R}{H}(H-h) \right)^2 h \Rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} [H^2 - 2h(H-h) + h^2]$$

⑬ $\Rightarrow V'(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} (H-h)(H-3h)$ de donde $V'(h) = 0$ si $H=h$ o $h = \frac{1}{3}H$

En $h=H$ no existe cono, entonces $V'(h) = 0$ si $h = \frac{1}{3}H$

Además $V''(h) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} [-H + 3h - 3H + 3h] = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} (6h - 4H) \Rightarrow$

⑭ $V''(\frac{1}{3}H) = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} (6 \cdot \frac{H}{3} - 4H) = -\frac{2}{3} \pi \frac{R^2}{H} < 0 \Rightarrow h = \frac{1}{3}H$ genera Volumen máximo.

Pauta Problema 3

a) Para estudiar la convergencia de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x+k^6}} dx$ se puede, por ejemplo, proceder por comparación. En efecto $\frac{1}{\sqrt[3]{x+k^6}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad \forall x \in (0,1)$

0.5 \Rightarrow y como $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \left(\frac{1}{3} < 1\right)$ converge $\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x+k^6}} dx$ CONVERGE

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$: es claramente alternante y como $\frac{1}{n}$ es decreciente y $\sin x$ es creciente en $(0,1)$, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ decrece y $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow \sin 0 = 0$

1.0 Si, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es serie tipo Leibnitz y por lo tanto CONVERGE

Para $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es comparable con $\sum \frac{1}{n}$ pues

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ y como $\sum \frac{1}{n}$ diverge (Armónico) $\Rightarrow \sum (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ DIV.

1.0 \Rightarrow En consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es CONDICIONALMENTE CONVERGENTE

b) i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Para el radio de convergencia calculamos $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$
 $\Rightarrow \alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = \infty \Rightarrow$ la serie está

0.5 definida y converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

1.0 Entonces $f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \xrightarrow{\text{cambio de índice}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + x = f(x) + x$

ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^q}, q \geq 0$. Para el radio de convergencia $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

0.5 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right)^q = 1 \cdot 1^q = 1 \Rightarrow R = 1$ y $I_C = (-1, 1)$

Para los extremos $x=1$ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ es comparable con $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^q}$ $u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$

1.0 que es $\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^q}$ que converge para $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^q}$ converge para $q > 1$

Para $x=-1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(\ln n)^q}$ que es alternante tipo Leibnitz y converge $\forall q \geq 0$

0.5 Entonces si $q > 1, I_C = [-1, 1]$ y si $0 \leq q \leq 1, I_C = (-1, 1)$